

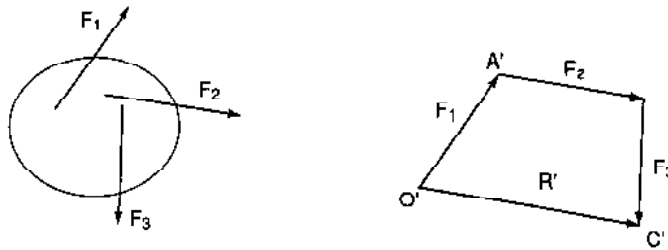
CHƯƠNG II**HỒ LỊCH PHONG****Bài 5. VÉC TƠ CHÍNH VÀ MÔMEN CHÍNH CỦA HỒ LỊCH PHONG****I. Véc tơ chính của hồ lịch phong****1. Định nghĩa**

Cho hồ lịch phong $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ Véc tơ chính của hồ lịch, ký hiệu $\vec{R}'$ là véc tơ tổng của các véc tơ hồ lịch.

$$\vec{R}' = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \dots + \vec{F}_n = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i \quad (5.1)$$

2. Xác định véc tơ chính của hồ lịch

* Có thể sử dụng phương pháp vẽ đa giác hồ lịch (xem bài 4). Trong trường hợp này, đa giác hồ lịch là đa giác phẳng (H5 – 1)



H5 - 1

* Cũng có thể xác định véc tơ chính qua các hình chiếu của nó trên các trục tọa độ vuông góc theo công thức (4.3). Trong trường hợp này, chỉ cần xác định hai hình chiếu của nó trên hai trục vuông góc nhau.

$$R'_x = \bar{F}_{1x} + \bar{F}_{2x} + \dots + \bar{F}_{nx} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_{ix} \quad (5.2)$$

$$R'_y = \bar{F}_{1y} + \bar{F}_{2y} + \dots + \bar{F}_{ny} = \sum_{i=1}^n \bar{F}_{iy}$$

Trên số và phương chiếu của véc tơ chính để xác định theo công thức:

$$R' = \sqrt{R'^2_x + R'^2_y}, \quad \cos \alpha = \frac{R'_x}{R'}, \quad \cos \beta = \frac{R'_y}{R'} \quad (5.3)$$

(α, β là góc hợp bởi $\vec{R}'$ và các trục ox, oy)

II. Mômen chính của hồ lịch đối với điểm**1. Mômen chính của một lực đối với điểm**

Mômen của một lực đối với điểm O , ký hiệu $\overline{m}_0(\vec{F})$ là mômen của lực đối với điểm O .

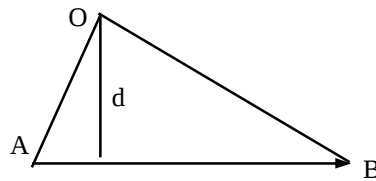
$$\overline{m}_0(\vec{F}) = \pm Fd \quad (\text{Nm}) \quad (5.4)$$

Trong đó: F là trọng lực của vật, d là khoảng cách vuông góc từ O đến đường tác động của vật.

Quy ước: $\vec{m}_O(\vec{F}) > 0$ khi vật có chiều quay quanh O ngược chiều kim đồng hồ
 $\vec{m}_O(\vec{F}) < 0$ trong trường hợp ngược lại.

Chú ý: – Mômen của vật đối với điểm bằng 0 khi vật đi qua điểm lấy mômen ($d = 0$).

Vật trọng, mômen của vật đối với điểm bằng hai lần diện tích tam giác có đỉnh là điểm lấy mômen, có đáy là vectơ vật.

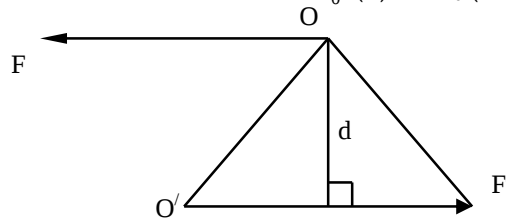


H5-2

$$|\vec{m}_O(\vec{F})| = 2 \text{ dt } \Delta OAB$$

– Mômen của trọng lực bằng mômen của một vật thành phần đối với điểm nằm trên đường tác động của vật thành phần kia.

$$\vec{m} = Fd = \vec{m}_{O'}(\vec{F}) = \vec{m}_O(\vec{F}') \quad (5.5)$$

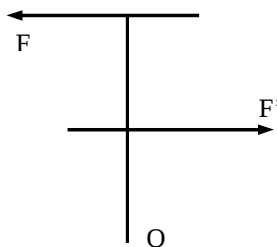


(O nằm trên đường tác động của $\vec{F}$ & O' nằm trên đường tác động của $\vec{F}'$)

H5 – 3

– Mômen của trọng lực ($\vec{F}, \vec{F}'$) đối với một điểm O bất kỳ (tức là mômen của vật $\vec{F}$ và $\vec{F}'$ đối với O) chính bằng mômen của trọng lực.

$$\vec{m} = \vec{m}_O(\vec{F}) + \vec{m}_O(\vec{F}')$$



H5 – 4

2. Mômen chính của hệ lực phẳng đối với một điểm

Mômen chính của hệ lực phẳng đối với điểm O là đại lượng đại số, ký hiệu $\bar{m}^O$ bằng tổng mômen của các lực của hệ đối với điểm O .

$$\bar{m}^O = \bar{m}_O(\vec{F}_1) + \bar{m}_O(\vec{F}_2) + \dots + \bar{m}_O(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n \bar{m}_O(\vec{F}_i) \quad (5.6)$$

Nhận xét

– Vectơ chính tắc, còn mômen chính phụ thuộc vào điểm lấy mômen, nghĩa là mômen chính đối với hai điểm khác nhau sẽ khác nhau.

$$\bar{m}^O = \bar{m}^{O'} + \bar{m}_{O'}(\vec{R}_O') \quad (5.7)$$

Trong đó: $\bar{m}^O$ và $\bar{m}^{O'}$ là mômen chính của hệ lực đối với điểm O và O' tương ứng

$\bar{m}_{O'}(\vec{R}_O')$ là mômen đối với điểm O' của vectơ chính đặt tại điểm O .

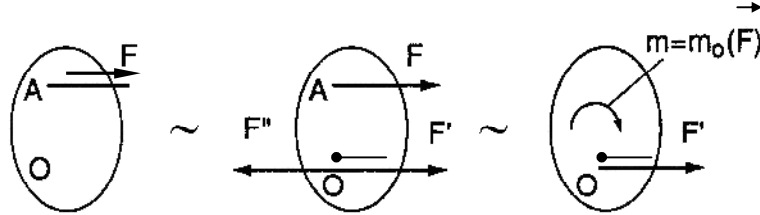
– Đối với hệ lực đồng quy thì mômen chính của hệ lực đối với điểm đồng quy bằng 0.

– Đối với hệ lực song song thì vectơ chính của hệ lực luôn bằng 0, còn mômen chính của hệ lực đối với điểm bất kỳ O nào cũng bằng mômen của lực song song tính (tức là bằng tổng mômen của các lực thành phần của hệ lực song song).

Bài 6. THU GỌN HẸP LỊCH PHONG**I. Định lý dời trục song song**

Lực $\vec{F}$ đặt tại A tác dụng vào vật có trục quay O và mômen động lượng của lực $\vec{F}$ đặt tại O và mômen động lượng của lực $\vec{F}$ đặt tại A có cùng trục quay O.

$$\vec{F} \sim [\vec{F}' \text{ và } \vec{m} = \vec{m}_0(\vec{F})] \quad (6.1)$$



H 6 - 1

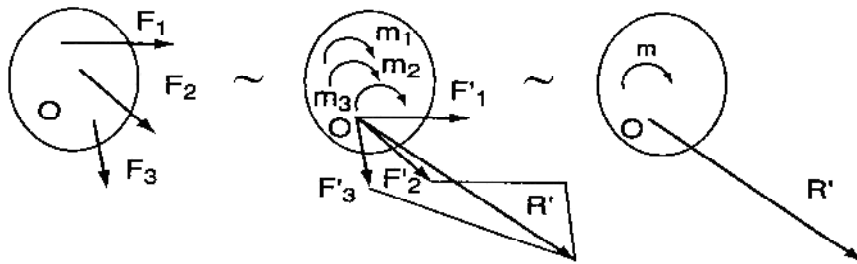
Chứng minh: Đặt tại O hai lực cân bằng $(\vec{F}', \vec{F}'')$ có cùng trục quay O.

Theo tiên đề 2, ta có $\vec{F} \sim (\vec{F}, \vec{F}', \vec{F}'') \sim [\vec{F}' \text{ và } (\vec{F}, \vec{F}'')]$

$(\vec{F}, \vec{F}'')$ là mômen động lượng của lực có mômen $\vec{m} = \vec{m}_0(\vec{F})$ (Theo công thức 5.5)

II. Thu gọn hệ lực phẳng vào một tâm

Lấy một điểm O trong mặt phẳng tác dụng của hệ lực gọi là tâm thu gọn. Áp dụng định lý dời trục song song dời các lực về tâm O.



H6 - 2

$$\vec{F}_1 \sim \vec{F}'_1 \text{ và } \text{ngũ u } \vec{m}_1 = \vec{m}_0(\vec{F}_1)$$

$$\vec{F}_2 \sim \vec{F}'_2 \text{ và } \text{ngũ u } \vec{m}_2 = \vec{m}_0(\vec{F}_2)$$

.....

$$\vec{F}_n \sim \vec{F}'_n \text{ và } \text{ngũ u } \vec{m}_n = \vec{m}_0(\vec{F}_n)$$

Như vậy: Thu gọn hệ lực $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ về tâm O, ta được hệ lực $(\vec{F}'_1, \vec{F}'_2, \dots, \vec{F}'_n)$ đồng quy tại O và hệ mômen $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n)$

* Theo kết quả bài 4, hệ lực đồng quy đó có hợp lực đi qua O, đồng thời biểu diễn bằng vectơ chính của hệ lực đã cho đặt tại O (vectơ chính của hệ lực đồng quy thu về O và vectơ chính của hệ lực đã cho bằng nhau).

$$\vec{R}'_0 = \sum_{i=1}^n \vec{F}'_i = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = \vec{R}' \quad (6.2)$$

Trong đó: $\vec{R}'_0$ là hợp lực của các lực đồng quy thu vào O

$\vec{R}'$ là vectơ chính của hệ lực phẳng đã cho.

* Hệ ngẫu lực phẳng $(\vec{m}_1, \vec{m}_2, \dots, \vec{m}_n)$, theo định lý 4.5 thì ngẫu lực đồng quy với moment ngẫu lực $\vec{m}$ nằm trong mặt phẳng của hệ lực.

$$\vec{m} = \vec{m}_1 + \vec{m}_2 + \dots + \vec{m}_n = \vec{m}_0(\vec{F}_1) + \vec{m}_0(\vec{F}_2) + \dots + \vec{m}_0(\vec{F}_n) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_0(\vec{F}_i) = \vec{m}^0 \quad (6.3)$$

Đưa vào (6.2) và (6.3) ta có định lý:

Định lý (6.2): Hệ lực phẳng bất kỳ đồng quy với moment lực và moment ngẫu lực đồng quy với moment ngẫu lực tùy ý cùng nằm trong mặt phẳng tác động của hệ lực. Chúng đồng quy là lực và ngẫu lực thu gọn. Lực thu gọn đặt tại tâm thu gọn, có vectơ chính bằng vectơ chính của hệ lực còn ngẫu lực thu gọn có mômen bằng mômen chính của hệ lực đặt tại tâm thu gọn.

Chú ý: – Phép cộng, chiếu và trục lực thu gọn không phụ thuộc vào tâm thu gọn vì vectơ chính là vectơ tự do.

– Ngẫu lực thu gọn phụ thuộc vào tâm thu gọn vì nó được tính theo công thức (5.7) khi tâm thu gọn thay đổi.

III. Các dạng chuẩn của hệ lực phẳng

Từ kết quả thu gọn hệ lực phẳng với moment tâm, ta nhận được các dạng chuẩn sau:

a. Hệ lực phẳng cân bằng khi vectơ chính và mômen chính đều với moment ngẫu lực bất kỳ triệt tiêu:

$$\vec{R}' = 0, \vec{m}^0 = 0 \rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0$$

b. Hệ lực phẳng đồng quy với moment ngẫu lực khi vectơ chính triệt tiêu và mômen chính đều với moment ngẫu lực bất kỳ không triệt tiêu.

$$\vec{R}' = 0, \vec{m}^0 \neq 0 \rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{m}^0$$

Trong hai trường hợp trên, vì $\vec{R}' = 0$ nên theo công thức (5.7), mômen chính đều với moment tâm đều bằng nhau. Trong trường hợp (a) bằng 0 đều với moment tâm, còn trong trường hợp (b) bằng $\vec{m}^0$ đều với moment tâm.

c. Hệ lực phẳng có hợp lực

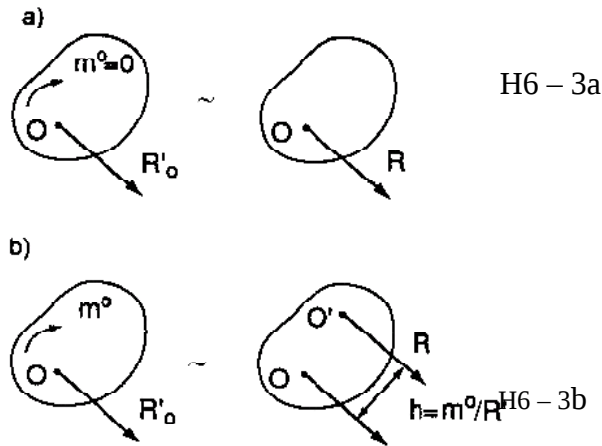
$$* \text{ Khi } \vec{R}' \neq 0, \vec{m}^0 = 0 \rightarrow (\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim \vec{R}'_0$$

$$* \text{ Khi } \vec{R}' \neq 0, \vec{m}^0 \neq 0:$$

Hệ lực thu vào tâm O được moment lực $\vec{R}'_0$ và moment ngẫu lực $\vec{m}^0$. Theo định lý d'Álembert, có thể đưa về moment lực có phương chiếu và trục song song chiếu và trục song song với vectơ chính như đặt tại điểm O' khác O cách O moment đo $h = \frac{m^0}{R'}$, sao

cho mômen của hệ p là $\vec{R}$ đối với điểm O bằng $\vec{m}^0$, tức là:

$$\vec{m}_o(\vec{R}) = \vec{m}^0 = \sum_{i=1}^n \vec{m}_o(\vec{F}_i)$$



IV. Định lý Varignon

Trong trường hợp hệ p là có hệ p, mômen của hệ p đối với một điểm bất kỳ bằng tổng mômen của các lực của hệ p đối với cùng điểm đó.

$$\vec{m}_o(\vec{R}) = \sum_{i=1}^n \vec{m}_o(\vec{F}_i) \quad (6.4)$$

Từ đó dễ dàng suy ra:

- Hệ p là phẳng thì có hai định luật sau:
 - * Cân bằng của vectơ chính của hệ p là điều kiện cần.
 - * Hệ p là vectơ chính của hệ p không điều kiện.
- Hệ p là có hai định luật sau:
 - * Cân bằng của mômen chính của hệ p là điều kiện cần.
 - * Hệ p là vectơ mômen chính của hệ p không điều kiện.
- Hệ p là phẳng song song cùng chiều có một định luật là hệ p vì vectơ chính của hệ p không điều kiện.
- Hệ p là phẳng song song ngược chiều có thể có ba định luật: Cân bằng, hệ p và hệ p.

Bài 7. ĐIỀU KIỆN CÂN BẰNG VÀ CÁC PHƯƠNG TRÌNH CÂN BẰNG CỦA HỒ LỊCH PHƯƠNG

1. Điều kiện cân bằng

Định lý 7.1: Điều kiện cần và đủ để hồ lịch phương cân bằng là vectơ chính và mômen chính của hồ lịch đối với một điểm bất kỳ phải đồng thời triệt tiêu.

$$(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n) \sim 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{R} = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i = 0 \\ \vec{m}^0 = \sum_{i=1}^n \vec{m}_0(\vec{F}_i) = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

Chứng minh: – Điều kiện cần để chứng minh đưa vào các dòng chuẩn của hồ lịch, vì nếu điều kiện (7.1) không thỏa mãn thì hồ lịch phương hoặc tịnh động với một trục hoặc một trục, chúng đều không thỏa mãn tiên đề 1.

– Điều kiện đủ là hiển nhiên vì khi vectơ chính bằng 0, hồ lịch thu gọn về tâm 0 sẽ được một trục, tức là thu gọn về hai trục. Nếu trục bằng 0 thì hai trục đó là hai trục cân bằng.

2. Các phương trình cân bằng của hồ lịch phương

Điều kiện (7.1) có thể viết dưới dạng các phương trình đồng thời là phương trình cân bằng. Có 3 phương trình cân bằng:

– Dòng 1: Điều kiện cần và đủ để hồ lịch cân bằng là tổng hình chiếu các trục lên hai trục của điểm vuông góc và tổng mômen các trục đối với một trục triệt tiêu.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \bar{F}_{ix} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \bar{F}_{iy} &= 0 \\ \sum \bar{m}_0(\vec{F}_i) &= 0 \end{aligned} \quad (7.2)$$

– Dòng 2: Điều kiện cần và đủ để hồ lịch phương cân bằng là tổng hình chiếu của các trục lên một trục và tổng momen các trục đối với hai điểm A & B tùy ý triệt tiêu, với điều kiện AB không vuông góc với trục chiếu.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \bar{F}_{ix} &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \bar{m}_A(\vec{F}_i) &= 0 \\ \sum_{i=1}^n \bar{m}_B(\vec{F}_i) &= 0 \end{aligned} \quad (7.3)$$

– Dòng 3: Điều kiện cần và đủ để hồ lịch phương cân bằng là tổng mômen của các trục đối với 3 điểm A, B, C không thẳng hàng triệt tiêu.

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^n \bar{m}_A (\vec{F}_i) &= 0 \\
\sum_{i=1}^n \bar{m}_B (\vec{F}_i) &= 0 \\
\sum_{i=1}^n \bar{m}_C (\vec{F}_i) &= 0
\end{aligned} \tag{7.4}$$

3. Điều kiện cân bằng của vật rắn không thể do

Trong hệ hợp vật rắn không thể do, ngoài các lực chủ động tác động lên vật rắn còn có các phản lực liên kết. Giả sử phóng các liên kết, ta có vật thể do cân bằng chịu tác động của hệ gồm có các lực tác động và các phản lực liên kết.

Bài 8. CÁC BÀI TOÁN ĐỘNG NG**I. Bài toán cân bằng tĩnh**

Trong thực tế ta thường gặp kết cấu gồm nhiều vật liên kết với nhau và cùng cân bằng, đó là hệ vật cân bằng.

Có hai phương pháp giải bài toán hệ vật cân bằng:

1. Phương pháp tách vật

- Chọn mỗi vật riêng làm vật khảo sát bằng cách vẽ riêng từng vật riêng.
- Xác định hệ lực tác động lên mỗi vật đó sau khi giải phóng liên kết.
- Lập và giải các phương trình cân bằng cho mỗi vật.

Chú ý: Mỗi vật cân bằng dưới tác động của hệ lực phẳng nên có thể viết được 3 phương trình cân bằng độc lập. Nếu hệ có n vật riêng thì có tối đa $3n$ phương trình cân bằng độc lập.

- Nhận định kết quả và biện luận.

2. Phương pháp hệ nhíp

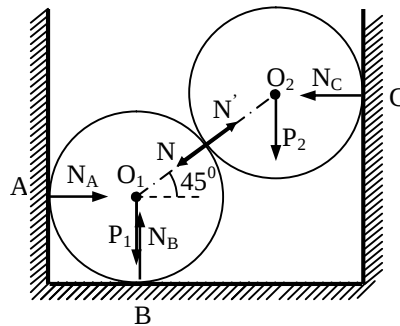
Từng từng nhíp trên gồm 4 bước. Đầu tiên ta hoá riêng các hệ và viết được 3 phương trình cân bằng, sau đó tách ra khỏi hệ $(n - 1)$ vật và lập được $3(n - 1)$ phương trình cân bằng từng nhíp.

Với phương trình này nếu hệ có n vật riêng thì số phương trình cân bằng tối đa là: $3 + 3(n - 1) = 3n$.

Ví dụ :

Hãy xác định phản lực của các mặt phẳng lên 2 quả cầu và lực ép tường ngang hệ giữa 2 quả cầu đó (hình vẽ). Biết 2 quả cầu có cùng bán kính R và cùng trọng lượng P .

Giải



Dùng phương pháp tách vật:

Xét quả cầu O_2 chịu tác động hệ lực để lập quy cân bằng ($\vec{P}_2, \vec{N}', \vec{N}_C$)

$$R_x = -N_C + N' \cos 45^\circ = 0$$

$$R_y = -P_2 + N' \sin 45^\circ = 0$$

Giải hệ ta được:

$$N_C = P_2 = P \text{ và } N' = P\sqrt{2}$$

Xét quĩ cầu O_1 chịu tác động hợp lực để quy cân bằng ($\vec{P}_1, \vec{N}_A, \vec{N}_B, \vec{N}$)

$$R_x = N_A - N\cos 45^\circ = 0$$

$$R_y = N_B - P_1 - N\cos 45^\circ = 0$$

$$\text{Vậy } N = N' \text{ và } P_1 = P$$

Giả sử ta đặt ra:

$$N_A = N \frac{\sqrt{2}}{2} = P$$

$$N_B = P + N \frac{\sqrt{2}}{2} = 2P$$

Phân tích pháp hóa rắn:

Xét toàn bộ hệ chịu tác động hợp lực ngoại lực ($\vec{P}_1, \vec{P}_2, \vec{N}_A, \vec{N}_B, \vec{N}_C$)

$$R_x = N_A - N_C = 0$$

$$R_y = N_B - P_1 - P_2 = 0$$

$$\sum \vec{m}_{O_1}(\vec{F}) = N_C \cdot 2R \cdot \cos 45^\circ - P_2 \cdot 2R \cdot \cos 45^\circ = 0$$

Giả sử ta đặt ra:

$$N_C = N_A = P \text{ và } N_B = 2P$$

Tách quĩ cầu O_2 , xét hợp lực ($\vec{P}_2, \vec{N}', \vec{N}_C$)

$$R_x = -N_C + N' \cos 45^\circ = 0$$

$$N' = N = N_C \sqrt{2} = P\sqrt{2}$$

II. Ma sát

1. Phân tích liên kết tại các mặt tiếp xúc

Trong thực tế, tại chỗ tiếp xúc giữa hai vật không phải là tiếp xúc điểm mà tiếp xúc theo đường hoặc mặt. Phân tích xu hướng chuyển động tại chỗ tiếp xúc là mặt hợp lực. Thu hợp lực này về tâm thu gọn, ta đặt ra phân tích liên kết $\vec{R}$ và mặt ngấn liên kết $\vec{M}$ cùng nằm trong mặt phẳng hợp lực.

Phân tích liên kết có thể phân ra:

$$\vec{R} \begin{cases} \vec{N}: \text{Có phương pháp tuyến với mặt tiếp xúc} \\ \vec{T}: \text{Có phương pháp tiếp tuyến với mặt tiếp xúc} \end{cases}$$

$$\vec{M} \begin{cases} \vec{M}_x: \text{Nằm trong mặt phẳng tiếp tuyến} \\ \vec{M}_1: \text{Nằm trong mặt phẳng vuông góc với phương pháp tiếp tuyến.} \end{cases}$$

Khi hai vật tiếp xúc dịch chuyển hay có khuynh hướng dịch chuyển thì ngẩng đầu và i nhau. Các liên kết trên có tác động lên trục nhúng dịch chuyển.

$\vec{T}$: Lực trục

$\overline{M}_l$: Lực lăn

$\overline{M}_x$: Lực xoay

2. Các lực ma sát

- a. Định nghĩa: Các phân lực liên kết của mặt tiếp xúc gây lên trục chuyển động hay xu hướng chuyển động của vật tiếp xúc trên nó được gọi là:

$\vec{T}$: Lực ma sát trục

$\overline{M}_l$: Ngẫu lực ma sát lăn

$\overline{M}_x$: Ngẫu lực ma sát xoay

b. Tính chất

- Chúng đều lên trục chuyển động hoặc xu hướng chuyển động
- Chúng xuất hiện chỉ tiếp xúc trục, lăn, xoay.
- Trượt: $0 \leq T \leq fN$

$$0 \leq M_l \leq f_l N$$

$$0 \leq M_x \leq f_x N$$

trong đó: f : Là hệ số ma sát trục

f_l : Là hệ số ma sát lăn (m)

f_x : Là hệ số ma sát xoay (m)

- Khi ở trạng thái tĩnh thì $\vec{T}$, $\overline{M}_l$, $\overline{M}_x$ có trục luôn bằng lực, mômen lực tác động lên vật gây xu hướng trục, lăn, xoay.
- Khi lực và mômen lực tác động có trục bằng các trục của các đầu của chúng:

$$T_{\max} = fN$$

$$M_{l\max} = f_l N$$

$$M_{x\max} = f_x N \text{ thì vật bắt đầu trục, lăn hoặc xoay}$$

- Các hệ số f , f_l , f_x chỉ phụ thuộc vào tính chất của mặt tiếp xúc, không phụ thuộc vào diện tích tiếp xúc.
- Hệ số ma sát động nhỏ hơn hệ số ma sát tĩnh.

3. Điều kiện cân bằng khi có ma sát

- a. Điều kiện cân bằng tổng quát – Miền cân bằng

Ngoài các phương trình cân bằng chung, khi có ma sát còn phải thêm các phương trình và bất phương trình.

Hình chiếu các lực lên phương trình trượt:

$$\sum x \leq fN$$

Mômen của các lực gây lăn:

$$\sum \bar{m}_l(\vec{F}_i) \leq f_l N$$

Mômen của các lực gây xoay:

$$\sum \bar{m}_x(\vec{F}_i) \leq f_x N$$

Do có bất phương trình nên bài toán ma sát có tập hợp nghiệm làm thành miền cân bằng. Ngoài ra trong các bài toán ma sát còn có thể đưa ra các điều kiện:

– Lăn không trượt: $\sum x \leq fN$

$$\sum m_l(\vec{F}_i) \geq f_l N$$

– Không lăn, không trượt: $\sum x \leq fN$

$$\sum m_l(\vec{F}_i) \leq f_l N$$

– Không lăn, không xoay, không trượt: $\sum x \leq fN$

$$\sum m_l(\vec{F}_i) \leq f_l N$$

$$\sum m_x(\vec{F}_i) \leq f_x N$$

– Vừa lăn, vừa xoay, vừa trượt: $\sum x \geq fN$

$$\sum m_l(\vec{F}_i) \geq f_l N$$

$$\sum m_x(\vec{F}_i) \geq f_x N$$

b. Phân tích toàn phần, góc ma sát, nón ma sát

Xét phương hợp ma sát trượt, phân tích liên kết toàn phần trong phương hợp này là:

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$$

$$N = R \cos$$

$$T = R \sin$$

$$T \leq f N$$

$$\text{nên } T \leq f R \cos$$

$$\text{hay } R \sin \leq f R \cos \rightarrow \tan \leq f$$

Trên phương hợp $T_{\max}$ thì $R_{\max}$ và phương hợp $\tan \leq f$ (φ : góc ma sát). Khi không trượt thì $T < fN$, suy ra $\vec{R}$ nằm trong góc φ . Xu hướng trượt có thể diễn ra theo mọi phía, do đó hình nón tiếp xúc với góc φ được gọi là nón

ma sát và điều kiện không trượt có thể nêu: “phần lớn toàn phần $\vec{R}$ phải nằm trong nón ma sát”.

Ví dụ: Xác định góc nghiêng để khối trụ có bán kính R đặt trên mặt phẳng nghiêng cân bằng. Cho biết hệ số ma sát trượt giữa khối trụ với mặt nghiêng OA là f và hệ số ma sát lăn là μ .

Giải

Khối trụ khối trụ cân bằng.

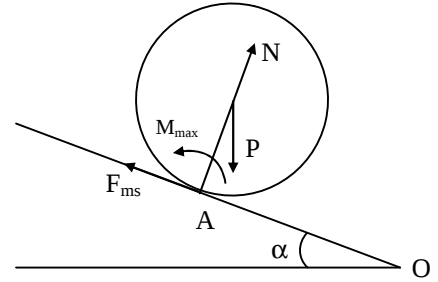
Hệ lực tác dụng: $(\vec{P}, \vec{N}, \vec{F}_{ms}, M_l) \sim 0$

Hệ phương trình cân bằng:

$$\sum X = P \sin \alpha - F_{ms} = 0 \quad (1)$$

$$\sum Y = -P \cos \alpha + N = 0 \quad (2)$$

$$\sum m_A = -PR \sin \alpha + M_l = 0 \quad (3)$$



H8 – 2

Với $F_{ms} \leq f N$

$$M_l \leq \mu N$$

$$(2) \rightarrow N = P \cos \alpha$$

$$(1) \rightarrow P \sin \alpha - f P \cos \alpha = 0 \rightarrow \tan \alpha = f$$

$$(3) \rightarrow PR \sin \alpha - \mu P \cos \alpha = 0 \rightarrow \tan \alpha = \frac{\mu}{R}$$

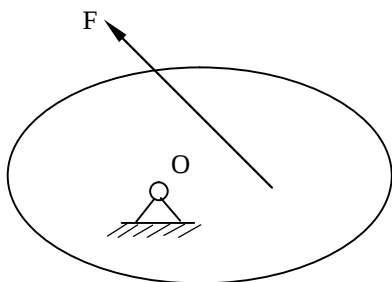
Thường thì $\frac{\mu}{R}$ rất nhỏ so với f nên điều kiện để cân bằng: $\tan \alpha \leq \frac{\mu}{R}$. Nếu tăng dần thì vật sẽ lăn ($\tan \alpha > f$).

Khi $\tan \alpha > f$ vật sẽ lăn và trượt.

III. Cân bằng đòn bẩy và vật lồi

1. Đòn bẩy

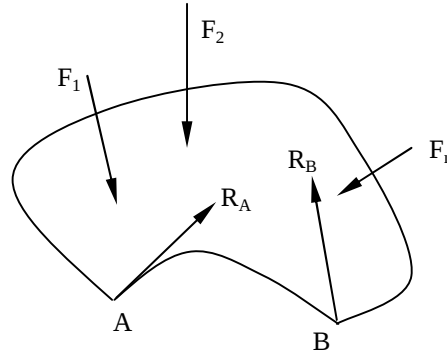
Đòn bẩy là vật rắn quay được quanh một trục cố định, các lực tác dụng lên vật rắn đều nằm trong mặt phẳng vuông góc với trục này. Giao điểm của trục này và mặt phẳng chứa lực tác dụng được gọi là điểm tựa của đòn.



Ta có điều kiện cần và đủ để đòn bẩy cân bằng là: “Tổng mômen của các lực tác dụng lên điểm tựa của đòn bẩy bằng không.”

$$\sum \vec{m}_O(\vec{F}_i) = 0$$

2. Vật rắn lồi đặc



Giả sử vật rắn chịu tác động của hệ lồi $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ và các liên kết tại A & B là $\vec{R}_A$ & $\vec{R}_B$.

Vật rắn cân bằng nếu $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n, \vec{R}_A, \vec{R}_B) \sim 0$.

Nếu hệ lồi chịu tác động lên vật rắn đặt trên mặt liên kết còn lại mặt liên kết

$$R_A \neq 0 \quad ; \quad R_B = 0$$

$$\text{hoặc } R_B \neq 0 \quad ; \quad R_A = 0$$

Khi đó vật rắn có thể quay quanh A hoặc B. Hay ta nói: vật có thể lật quanh A hoặc B.

Ta có điều kiện cân bằng của vật rắn như sau:

$$\text{Không lật quanh A: } \sum \bar{m}_A(\vec{F}_i) = 0$$

$$\text{Không lật quanh B: } \sum \bar{m}_B(\vec{F}_i) = 0$$

Trong thực tế, người ta căn cứ vào xu hướng lật của vật rắn và phân loại các lồi của hệ lồi $(\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n)$ thành lồi giơ và lồi lật, mômen tipping ngược của chúng là mômen giơ và mômen lật.

Điều kiện cân bằng của vật rắn lật được là:

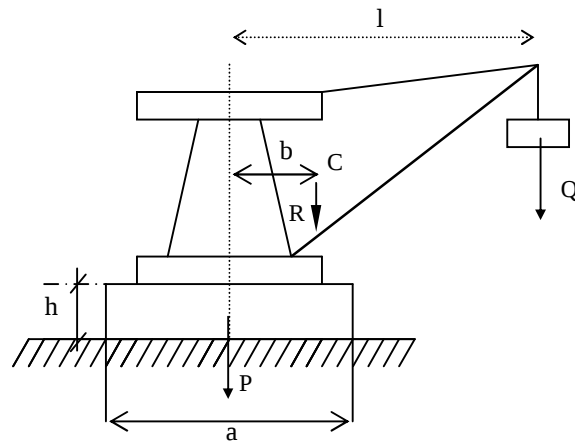
$$M_{\text{giơ}} > M_{\text{lật}} \text{ hay } K = \frac{M_{\text{giơ}}}{M_{\text{lật}}} > 1$$

K: Hệ số ổn định chống lật

Ví dụ

Cột trục đỡ cọc gần chân vệt móng băng đá. Trạng lồi ngang cột trục $R = 40 \text{ KN}$ và đặt ở C cách trục cột trục $1 \text{ đơn vị } b = 0,75 \text{ m}$. Cột trục nâng tải trục $Q = 25 \text{ KN}$ cách trục mặt đơn vị $l = 4 \text{ m}$. Móng đá có diện tích đáy là hình vuông cạnh $a = 2 \text{ m}$, trạng lồi ngang riêng đáy móng $\gamma = 20 \text{ KN/m}^3$. Xác định chiều cao h của móng để hệ ổn định $k = 2$

Giải



$$\text{Hệ số an toàn } k = 2 = \frac{M_{\text{đ}}}{M_{\text{lật}}}$$

$$\begin{aligned} \text{Trong đó } M_{\text{đ}} &= R \left(\frac{a}{2} - b \right) + P \cdot \frac{a}{2} \\ &= Ra + Pa - 2Rb \end{aligned}$$

$$M_{\text{l}} = Q \left(l - \frac{a}{2} \right) = 2Ql - Qa$$

$$\Rightarrow \frac{Ra + Pa - 2Rb}{2Ql - Qa} = 2$$

$$\text{mà } P = \gamma a^2 h$$

$$\Rightarrow h = \frac{2(2Ql - Qa) - Ra + 2Rb}{a \cdot \gamma}$$

$$h = \frac{2(2 \cdot 25 \cdot 4 - 25 \cdot 2) - 40 \cdot 2 + 2 \cdot 40 \cdot 0,75}{2 \cdot 20 \cdot 4}$$

$$h = 1,75 \text{ m}$$

CÂU HỎI ÔN TẬP

1. Phát biểu và vẽ minh họa định lý dời trục?
2. Nêu cách thu gọn hệ trục phẳng bất kỳ về một tâm, kết quả thu được? Các trục nguyên p xảy ra và cách nhận biết?
3. Vì sao các tâm thu gọn khác nhau thì vectơ chính không đổi còn mômen chính thay đổi?
4. Vectơ do chủ tác động của hệ trục phẳng bất kỳ có thể chuyển đổi như thế nào?
5. Nêu các dạng phương trình cân bằng của hệ trục phẳng bất kỳ?

6. Bài toán hệ lực phẳng bất kỳ cân bằng giải được như các phương trình cân bằng khi nào đã có mấy yếu tố chưa biết? Vì sao?
7. Định nghĩa vectơ chính của hệ lực phẳng? Phương pháp xác định vectơ chính của hệ lực phẳng?
8. Định nghĩa mômen chính của hệ lực phẳng: mômen của lực đối với một điểm – mômen chính của hệ lực phẳng đối với một điểm?
9. Kết quả thu được hệ lực phẳng với một tâm cho trước? Phương pháp xác định lực thu được và ngược lại lực thu được với một tâm?
10. Phương pháp bài toán cân bằng của một vật có hệ trục?